

## ANÁLISE DE PROPAGAÇÃO DE TRINCAS EM COMPÓSITOS LAMINADOS USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO

**William P. Paiva**

Universidade Estadual de Campinas – Departamento de Mecânica Computacional  
Cx. P. 6122 – 13083-970 – Campinas, SP, Brasil

**Paulo Sollero**

Universidade Estadual de Campinas – Departamento de Mecânica Computacional  
Cx. P. 6122 – 13083-970 – Campinas, SP, Brasil

***Resumo.** Neste artigo é apresentado o método dos elementos de contorno aplicado à análise do crescimento de trincas em materiais compósitos laminados. Isto envolve a determinação do fator de intensidade de tensão e da direção de propagação da trinca de forma incremental. A cada incremento, o fator de intensidade de tensão é calculado pela técnica da integral  $J$ , usando o método dos elementos de contorno. Da mesma forma, a direção de propagação é calculada, a cada incremento, pelo critério da máxima tensão circunferencial. Este artigo apresenta uma aplicação desta técnica na análise de um elo de corrente silenciosa fabricado em material compósito.*

***Palavras-chave:** Compósitos, Elementos de contorno, Mecânica da fratura, Propagação.*

### 1. INTRODUÇÃO

Na análise de propagação de trincas em materiais compósitos laminados estão presentes três grandes áreas da engenharia que estão em franco desenvolvimento: a tecnologia de materiais compósitos, as técnicas da mecânica da fratura e o método dos elementos de contorno.

Os métodos da mecânica da fratura têm surgido como ferramentas valiosas para análises de projetos e para garantir uma tolerância segura aos danos e defeitos presentes no material. A presença de uma trinca em uma estrutura normalmente induz altas concentrações de tensão na ponta da trinca e a mecânica da fratura provê meios pelos quais o campo de tensões na ponta da trinca bem como as deformações elásticas podem ser caracterizados. Assim, o principal objetivo da mecânica da fratura é quantificar a resistência do material ao crescimento de trincas, ou seja, prever a carga crítica acima da qual ocorrerá o crescimento de uma trinca latente sob um conjunto de cargas aplicadas.

Os deslocamentos devidos às deformações não elásticas na vizinhança da ponta da trinca podem ser desconsiderados se forem muito pequenos quando comparados com o comprimento da trinca e outras dimensões características. Temos então a mecânica da fratura elástica linear (Banerjee, 1994).

O estudo do crescimento de trinca é um tópico muito importante na mecânica da fratura e pode ser entendido como a análise do problema de propagação para diferentes tamanhos de trinca. No entanto os problemas de mecânica da fratura estão entre os mais difíceis de serem resolvidos com uma precisão numérica razoável. A razão disso é a presença de uma condição singular na ponta da trinca. Assim, o método dos elementos de contorno é recomendado para a análise da mecânica da fratura por sua característica de descrever com precisão os campos de tensão e deslocamento com altos gradientes (Cruse, 1988; Sollero, 1994).

O método dos elementos de contorno vem sendo desenvolvido já há várias décadas e através dos anos vem se consolidando como uma ferramenta de simulação computacional extremamente útil em várias disciplinas de engenharia. Sua aplicação em mecânica da fratura tem sido objeto de estudos desde o início dos anos 70. Esta trajetória pode ser vista em (Aliabadi, 1997; Cruse, 1998).

Um dos tópicos mais recentes em desenvolvimento é a questão da propagação de trincas nos compósitos laminados. Quando a tensão excede os níveis críticos pode ocorrer a falha do compósito que se dá pelo processo de propagação da trinca que envolve a fratura da matriz em velocidades relativamente altas (Sih, 1991). As teorias de propagação são usadas para prever a direção e a carga na qual ocorre o crescimento da trinca no material (Sollero, 1994).

Este trabalho apresenta uma aplicação desta técnica na análise de um elo de corrente silenciosa fabricado em material compósito.

## 2. PROPAGAÇÃO

A propagação da trinca como movimento contínuo é concebível somente em termos matemáticos. Entretanto uma análise incremental da extensão da trinca é feita para prever o caminho da trinca que é assumido reto por partes (Sollero, 1994). O cálculo da taxa de crescimento então permite achar um intervalo de inspeção a ser adotado que permitiria a trinca ser encontrada antes de atingir o tamanho crítico. Isto é chamado tolerância ao dano (Kanninen e Popelar, 1985).

A técnica de propagação aqui apresentada é baseada na teoria da máxima tensão circunferencial e foi introduzida num programa de elementos de contorno. Em resumo, o programa faz uma análise de tensão pelo método dos elementos de contorno. Em seguida calcula o fator de intensidade de tensão pela integral J. O próximo passo é calcular a direção do incremento da trinca que é computado pela máxima tensão circunferencial. A trinca é estendida de um incremento na direção computada. Esta seqüência é repetida constituindo-se o percurso da propagação da trinca.

### 2.1 Método dos elementos de contorno

O método dos elementos de contorno tem sido aplicado com sucesso em problemas elásticos lineares em domínios contendo defeitos ou não. Os defeitos, internos ou superficiais, quando não incluem nenhuma área ou volume e através dos quais o deslocamento é descontínuo são definidos como trincas matemáticas (Portela et al., 1992).

A solução de uma equação integral de contorno é o objetivo do método dos elementos de contorno. A identidade Somigliana é um método de formulação de equações integrais de contorno obtida a partir do teorema de Betti para problemas de elasticidade (Kane, 1994) dada por

$$u_i(z') + \int_{\Gamma} T_{ij}(z', z) u_j(z) d\Gamma(z) = \int_{\Gamma} U_{ij}(z', z) t_j(z) d\Gamma(z) \quad (1)$$

onde seguindo a notação indicial  $i,j=1,2$ ; os deslocamentos  $u_j$  e as trações  $t_j$  são computados no contorno a solução fundamental anisotrópica elastostática para deslocamentos é dada por

$$U_{ij}(z, z') = 2 \operatorname{Re} \left[ p_{j1} A_{i1} \ln(z_1 - z'_1) + p_{j2} A_{i2} \ln(z_2 - z'_2) \right]; \quad (2)$$

a solução fundamental anisotrópica elastostática para as trações é dada por

$$T_{ij}(z, z') = 2 \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{z_1 - z'_1} q_{j1} (\mu_1 n_1 - n_2) A_{i1} + \frac{1}{z_2 - z'_2} q_{j2} (\mu_2 n_1 - n_2) A_{i2} \right] \quad (3)$$

e os pontos fonte  $z'$  e os pontos campo  $z$  são definidos por

$$z' = \begin{Bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x'_1 + \mu_1 x'_2 \\ x'_1 + \mu_2 x'_2 \end{Bmatrix} \quad (4)$$

e

$$z = \begin{Bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_1 + \mu_1 x_2 \\ x_1 + \mu_2 x_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

onde  $\mu_k$  são as raízes complexas da equação característica para materiais anisotrópicos com  $k=1,2$ ; e conforme (Sollero e Aliabadi, 1993)

$$[p_{jk}] = \begin{bmatrix} a_{11}\mu_k^2 + a_{12} - a_{16}\mu_k \\ a_{12}\mu_k + \frac{a_{22}}{\mu_k} - a_{26} \end{bmatrix} \quad (6)$$

e  $a_{ij}$  são as constantes elásticas do material.

Os coeficiente complexos  $A_{ik}$  são obtidos de

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ \mu_1 & -\bar{\mu}_1 & \mu_2 & -\bar{\mu}_2 \\ p_{11} & -\bar{p}_{11} & p_{12} & -\bar{p}_{12} \\ p_{21} & -\bar{p}_{21} & p_{22} & -\bar{p}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_{i1} \\ \bar{A}_{i1} \\ A_{i2} \\ \bar{A}_{i2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta_{i2} / (2\pi j) \\ \delta_{i1} / (2\pi j) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad (7)$$

$n_k$  são componentes do vetor normal e

$$[q_{jk}] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \mu_2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Uma solução analítica geralmente não é possível e uma solução numérica se faz necessária. O contorno é dividido em  $N$  elementos de contorno  $\Gamma$  e a Eq. (1) é reescrita como

$$c_{ij}(z')u_j(z') + \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} T_{ij}(z', z)u_j(z) d\Gamma_e(z) = \sum_{e=1}^N \int_{\Gamma_e} U_{ij}(z', z)t_j(z) d\Gamma_e(z) \quad (9)$$

Assim, a Eq. (9) é aplicada em cada um dos elementos do contorno de tal forma que a equação integral de contorno é transformada em um sistema linear de equações algébricas

$$H \mathbf{u} = G \mathbf{t} \quad (10)$$

onde as matrizes  $G$  e  $H$  contêm as integrais da solução fundamental anisotrópica  $T_{ij}$  e  $U_{ij}$  respectivamente e os vetores  $\mathbf{t}$  e  $\mathbf{u}$  contêm todas as trações e deslocamentos, conhecidos ou não. Após a aplicação das condições de contorno, o sistema de equações final é representado por

$$A \mathbf{x} = \mathbf{f} \quad (11)$$

de forma que neste novo sistema uma única solução pode ser obtida. Neste sistema o vetor  $\mathbf{x}$  contém os deslocamentos e as trações desconhecidos e o vetor  $\mathbf{f}$  contém os valores de contorno impostos para trações e deslocamentos.

Problemas gerais de trinca carregados em modo misto podem ser resolvidos com o método dos elementos de contorno dual, com uma formulação de única região, quando a equação integral de contorno para deslocamento é aplicada em uma das superfícies da trinca e a equação integral de contorno para tração é aplicada na outra.

A principal dificuldade na formulação do método dos elementos de contorno dual é o desenvolvimento de um procedimento de modelagem geral e preciso para a integração do valor principal de Cauchy e as integrais da parte finita de Hadamard, o que gera um resultado menos preciso que o método dos elementos de contorno convencional. De fato, as primeiras aplicações foram limitadas a trincas internas simples. No método da colocação pontual a equação integral de deslocamento requer a continuidade dos deslocamentos nos nós e a equação integral de tração requer a continuidade da derivada dos deslocamentos nos nós. A solução foi a introdução dos elementos quadráticos descontínuos na formulação do método dos elementos de contorno dual para modelagem de trincas, mantendo a eficiência e a simplicidade do método dos elementos de contorno convencional. Esta estratégia de modelagem apresenta os seguintes passos (Portela et al., 1992):

- Contornos das trincas são modelados com elementos quadráticos descontínuos;
- Superfícies adjacentes às superfícies das trincas são modeladas com elementos semi descontínuos;
- As demais superfícies são modeladas com elementos quadráticos contínuos;
- A equação integral de deslocamentos é aplicada em uma das superfícies da trinca;
- A equação integral de trações (forças de superfície) é aplicada na superfície oposta;
- A equação integral de deslocamento é usada nas demais superfícies.

## 2.2 Fator de intensidade de tensão para materiais anisotrópicos

A mecânica da fratura provê várias técnicas para determinar o fator de intensidade de tensão: a técnica da colocação mapeada modificada, o método da função da trinca de Green, a técnica das integrais de contorno, a técnica da integral  $J$ .

O método da integral  $J_k$  foi desenvolvido por (Chu e Hong, 1990) para determinar o fator de intensidade de tensão em placas anisotrópicas submetidas a carregamentos em que

aparecem combinados os modos I e II. Os fatores de intensidade de tensão são determinados separada e indiretamente a partir dos valores de  $J_1$  e  $J_2$ . Assim

$$J_k = \int_C W n_k - t_i u_{i,k} dC \quad (12)$$

onde, para o caso bidimensional, os índices  $i$  e  $k$  variam de 1 a 2,  $C$  é um contorno genérico em volta da trinca e  $W$  é a densidade de energia de deformação para material elástico linear dada por

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} . \quad (13)$$

Aqui,  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões,  $\varepsilon_{ij}$  é o tensor de deformações,  $t_i$  são os componentes da tração definida ao longo do contorno por

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (14)$$

onde  $n_j$  é o vetor unitário normal ao contorno.

Discretizando a Eq. (12), temos

$$J_k = \sum_{j=1}^N \int_C W^j n_k^j - t_i^j u_{i,k}^j dC^j \quad (15)$$

As relações entre  $J_1$ ,  $J_2$  e  $K_I$ ,  $K_{II}$  para materiais anisotrópicos podem ser derivadas convenientemente usando-se funções de variáveis complexas, tal que a integral  $J_k$  é relacionada com o fator de intensidade de tensão por (Chu e Hong, 1990)

$$J_1 = \alpha_{11} K_I^2 + \alpha_{12} K_I K_{II} + \alpha_{22} K_{II}^2 . \quad (16)$$

Na Eq. (16)  $\alpha_{ij}$  são as funções de variáveis complexas dadas por

$$\alpha_{11} = -\frac{a_{22}}{2} \operatorname{Im} \left[ \frac{\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 \mu_2} \right] \quad (17)$$

$$\alpha_{12} = -\frac{a_{22}}{2} \operatorname{Im} \left[ \frac{1}{\mu_1 \mu_2} \right] + \frac{a_{11}}{2} \operatorname{Im} [\mu_1 \mu_2] \quad (18)$$

$$\alpha_{22} = \frac{a_{11}}{2} \operatorname{Im} [\mu_1 + \mu_2] \quad (19)$$

onde  $a_{ij}$  são as constantes elásticas do material.

O desacoplamento do fator de intensidade de tensão pode ser obtido por

$$K_I = F K_{II} \quad (20)$$

e

$$K_{II} = \left( \frac{J_1}{\alpha_{11}F^2 + \alpha_{12}F + \alpha_{22}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

onde  $F$  é uma função que relaciona os deslocamentos relativos entre as faces da trinca e as propriedades do material conforme mostrado por Sollero (1994).

### 2.3 Teorias de propagação de trinca

Em geral os processos de fratura em compósitos são complexos. Estudos realizados em vários sistemas compósitos têm mostrado que durante a fratura diversos mecanismos podem ocorrer simultaneamente tais como trincas na matriz, rompimento e deslizamento das fibras, descolamentos interfaciais entre fibras e matriz, delaminação etc. O material pode ser visto de duas formas diferentes. Na primeira o consideramos como não homogêneo, vendo a trinca em uma escala microscópica. Neste caso deve-se levar em conta as propriedades mecânicas de cada fase em separado uma vez que a ponta da trinca afeta somente uma delas por vez. Outra maneira é considerarmos o material anisotrópico homogêneo cujas propriedades são determinadas por uma combinação das propriedades individuais dos constituintes pela regra das misturas (Agarwal e Broutman, 1990).

A análise incremental da extensão da trinca é usada para prever a direção da propagação da trinca a qual é assumida reta por partes. Após cada incremento uma análise de elementos de contorno é realizada e os modos mistos dos fatores de intensidade de tensão são computados pela técnica da integral  $J$ .

Uma das teorias mais simples e freqüentemente utilizada é a teoria da máxima tensão circunferencial.

**Teoria da máxima tensão circunferencial.** As principais vantagens do método estão relacionadas com sua simplicidade e uso de propriedades elásticas anisotrópicas sem necessidade de dados experimentais adicionais, nem sempre disponíveis (Sollero, 1994). O critério da máxima tensão circunferencial define que a trinca se propaga na direção  $\theta$  com a tensão circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$  atingindo seu máximo valor.

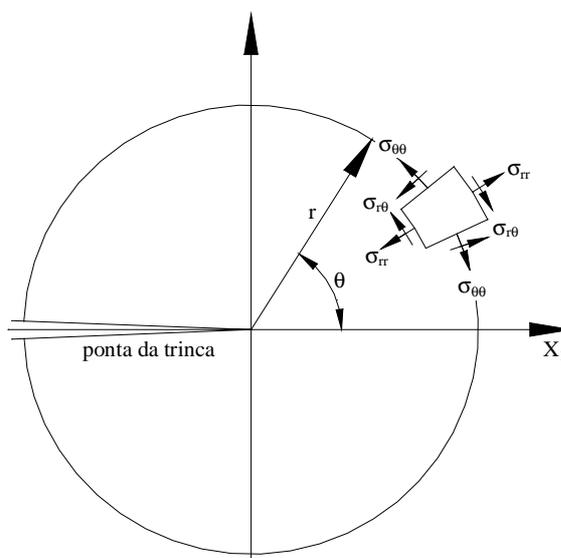


Figura 1 – Componentes da tensão em coordenadas polares.

As tensões em uma pequena região em torno da ponta da trinca podem ser obtidas sem nenhuma dificuldade de (Sih et al., 1965)

$$\sigma_{11}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \quad (22)$$

$$\sigma_{12}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] \quad (23)$$

$$\sigma_{22}^I = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \quad (24)$$

para carregamentos em modo I. Para carregamentos em modo II, tem-se

$$\sigma_{11}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_2^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{\mu_1^2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right] \quad (25)$$

$$\sigma_{12}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{\mu_1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} - \frac{\mu_2}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} \right) \right] \quad (26)$$

$$\sigma_{22}^{II} = \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \operatorname{Re} \left[ \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left( \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_2 \sin \theta}} - \frac{1}{\sqrt{\cos \theta + \mu_1 \sin \theta}} \right) \right]. \quad (27)$$

As tensões resultantes em modo misto podem ser obtidas pela adição dos componentes dos modos isolados, então

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II}. \quad (28)$$

### 3. RESULTADOS NUMÉRICOS

O programa foi utilizado na simulação de um caso real onde o objeto da análise era um componente mecânico, qual seja, um elo de uma corrente silenciosa, cujo sistema mecânico pode ser visto na Fig. 2, no qual foi analisada a propagação de uma trinca. O material é um laminado simétrico de grafite-epoxi com as fibras a  $\pm 60^\circ$  cujas propriedades ortotrópicas são  $E_1=144,78$  GPa,  $E_2= 11,72$  GPa,  $G_{12}=9,66$  GPa e  $\nu_{12}=0,21$ .

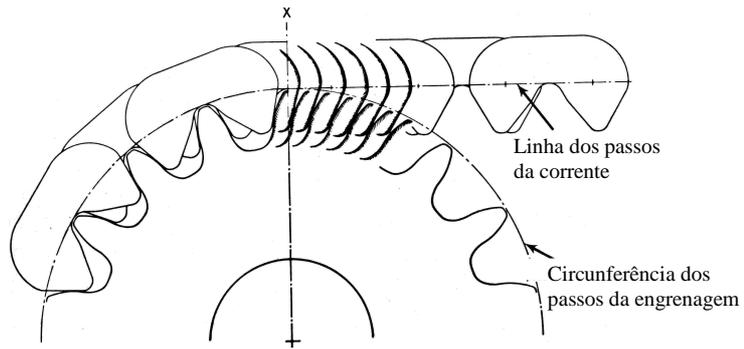


Figura 2 – Transmissão por corrente silenciosa.

As dimensões do elo é dado na Fig. 3 abaixo.

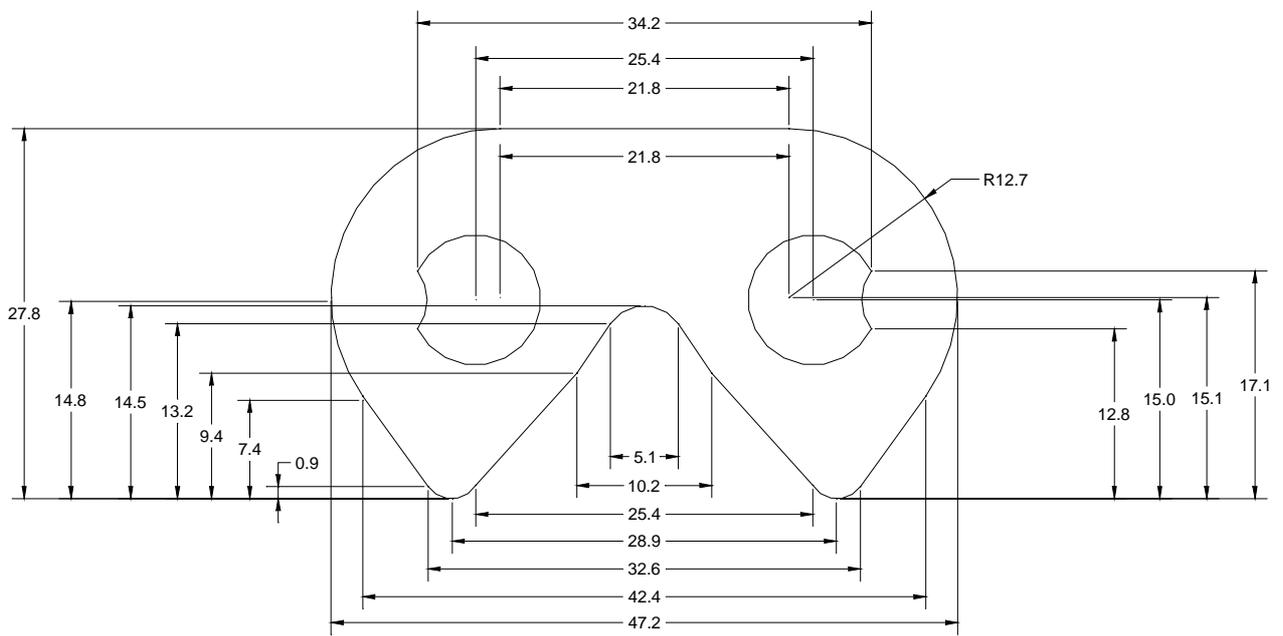


Figura 3 – Dimensões do elo de corrente dentada.

As condições de contorno foram aplicadas conforme Fig. 4.

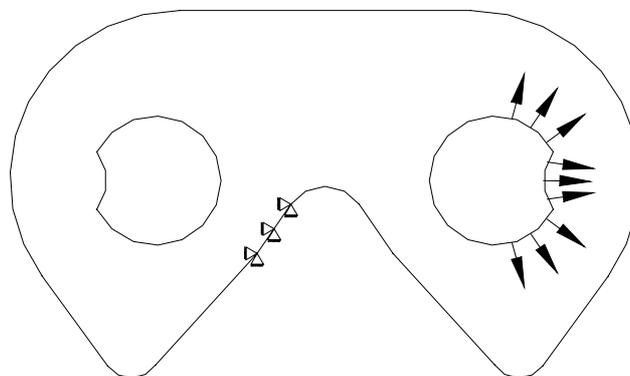


Figura 4 – Condições de contorno.

A Fig. 5 mostra a malha original, antes da aplicação das condições de contorno.

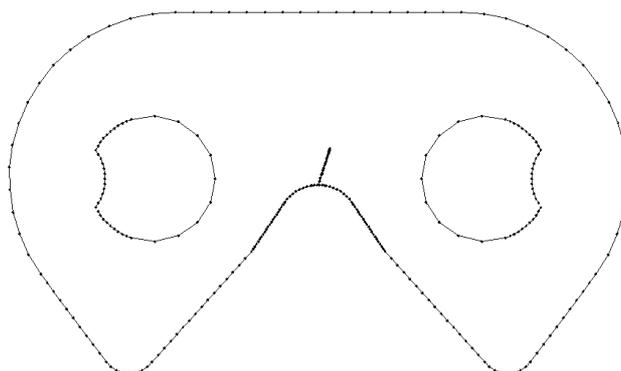


Figura 5 – Malha original.

A Fig. 6 mostra a malha deformada. A trinca está no segundo incremento.

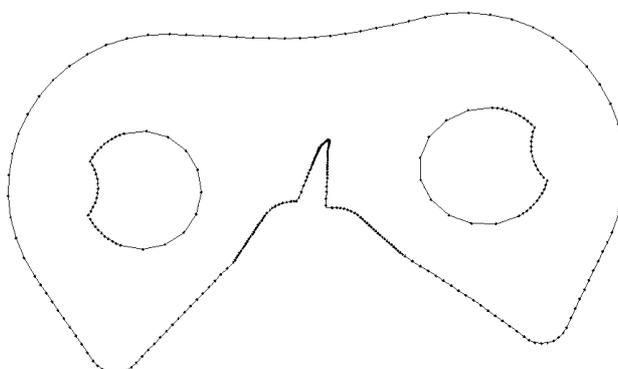


Figura 6 – Malha deformada com trinca se propagando.

A Tabela 1 mostra os valores dos fatores de intensidade de tensão encontrados na análise.

Tabela 1 – Fatores de intensidade de tensão.

Incremento	$K_I$	$K_{II}$	$K_{I-eq.}$
1	1.000	5.26e-2	1.000
2	1.091	1.52e-2	1.092

#### 4. CONCLUSÃO

Foi apresentada uma técnica para análise da propagação de trincas em materiais compósito laminado. A direção da propagação da trinca foi obtida pelo critério da máxima tensão circunferencial. O objeto de análise foi um elo de uma corrente silenciosa.

#### *Agradecimentos*

Os autores agradecem o apoio financeiro recebido da Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) que tornou possível a realização deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- Agarwal, B. D., Broutman, L. J. (1990) Analysis and Performance of Fiber Composites, 2<sup>a</sup> ed., A Wiley-Interscience publication, New York.
- Aliabadi, M. H. (1997) A new generation of boundary element methods in fracture mechanics, International Journal of Fracture, n° 86, p91-125, 1997.
- Banerjee, P. K. (1994) The boundary element methods in engineering, McGraw-Hill Book Company, England.
- Chu, S. J., Hong, C. S. (1990) Application of the  $J_k$  integral to mixed mode crack problems for anisotropic composite laminates, Engineering Fracture Mechanics, Vol. 35, n° 6, p1093-1103, 1990.
- Cruse, T. A. (1988) Boundary element analysis in computational fracture mechanics, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Kane, J. H. (1994) Boundary element analysis in engineering continuum mechanics, Prentice Hall, New Jersey.
- Kanninen, M. F., Popelar C. H. (1985) Advanced Fracture Mechanics, Oxford University Press, Inc, New York, 1985.
- Lekhnitskii, S. G. (1963) Theory of elasticity of an anisotropic elastic body, Holden-Day, Inc, San Francisco, 1963.
- Portela, A., Aliabadi, M. H., Rooke, D. P. (1992) The dual boundary element method: Effective implementation for cracks problems, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 33, p1269-1287, 1992.
- Sih, G. C. (1991) Mechanics of fracture initiation and propagation, Kluwer Academics Publishers, Dordrecht, 1991.
- Sih, G. C., Paris, P. C., Irwin, G. R. (1965) On cracks in rectilinearly anisotropic bodies, International Journal of Fracture Mechanics, n° 3, p 189-203, 1965.
- Sollero, P. (1994) Fracture mechanics analysis of anisotropic laminates by the boundary element method, Ph.D. Thesis, Wessex Institute of Technology.
- Sollero, P., Aliabadi, M. H. (1993) Fracture mechanics analysis of anisotropic plates by the boundary element method, International Journal of Fracture, n° 64, p269-284, 1993.

### CRACK GROWTH ANALYSIS IN ANISOTROPIC MATERIALS USING THE BOUNDARY ELEMENTS METHOD

**Abstract.** *In this work the boundary elements method applied to crack growth analysis is presented. This includes incremental calculations of stress intensity factor and crack growth path. After each increment the stress intensity factor is calculated by J-integral technique using boundary elements method. The crack growth path is evaluated, incrementally, using the maximum circumferencial stress criteria.*

**Keywords:** *Boundary elements, Composites, Fracture mechanics, Propagation.*